

水膜的快速仿真

李建方¹⁾, 周世哲^{2)*}, 李岩¹⁾, 刘利刚¹⁾

¹⁾(中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)

²⁾(湖南大学信息科学与工程学院 长沙 410082)
(shizhe@hnu.edu.cn)

摘要: 水膜是一种自然现象, 在相关的动画仿真或图像合成中有着重要作用. 文中提出一种平面上水膜的快速仿真方法. 首先在平面上进行一个基于粒子的液体仿真; 然后提取粒子所代表液体的轮廓, 并且离散轮廓所包围的区域; 最后在离散化后的区域内求解一个能量最小化问题, 以建立水膜的几何模型. 实验结果表明, 在大小合理的仿真区域, 该方法可以实时地动态交互仿真; 同时呈现了几个逼真的实验结果.

关键词: 水膜; cotangent 权重; 能量最小化; 三角化离散
中图分类号: TP391.41

Efficient Simulation of Water Puddle

Li Jianfang¹⁾, Zhou Shizhe^{2)*}, Li Yan¹⁾, and Liu Ligang¹⁾

¹⁾(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

²⁾(College of Computer Science and Electronic Engineering, Hunan University, Changsha 410082)

Abstract: In this paper a method is proposed to efficiently simulate water puddle on a plane. At first a particle-based fluid simulator is run on a plane. Then the 2D fluid contour is extracted and its enclosed region is discretized, inside which a minimization problem is solved to build the puddle surface. With reasonable simulation domain the puddle can be animated interactively in real time. Several experimental results demonstrate the realistic results.

Key words: water puddle; cotangent weight; energy minimization; triangulation

水膜是一种常见的自然现象, 把少量的水洒在一个平面上(如桌面上或者地板上), 在表面张力和重力的作用下就形成了水膜. 水膜是一种三维的薄膜曲面, 有着人眼可见的厚度; 它的动态过程显然与较大规模的流体运动是不一样的, 如海洋的表面主要是通过波谱和风力来进行动态模拟的, 杯子中的水主要是通过对流传输和扩散来仿真的.

为了较真实地渲染水膜, 光照和透明效果都是必须的, 而这些都需要动态地建立高质量的水

膜网格模型. 如果直接用三维的粒子来模拟水膜, 需要从三维粒子群中提取每一帧的水膜网格模型并且估计表面张力, 这样做计算量大、效率低. 本文提出一种快速的水膜仿真方法, 首先在平面上进行一个二维的粒子仿真, 并且提取粒子所代表液体的轮廓; 然后在轮廓所包含的区域内创建一个初始的平面三角网格模型; 最后在此模型上解决一个能量极小化问题, 使平面网格变形为水膜的三维网格模型. 本文中所有的水膜模型都是

收稿日期: 2016-07-11; 修回日期: 2016-12-07. 基金项目: 国家自然科学基金(61303147, 61222206, 11526212); 中国科学院“百人”计划; 中央高校基本科研业务费专项资金(531107040900). 李建方(1989—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 周世哲(1984—), 男, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机图形学; 李岩(1992—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 刘利刚(1975—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机图形学、3D 打印技术.

通过环境映射来渲染的,对于其他更为真实的渲染方法也是通用的。

在离散液体轮廓所包含区域建立初始平面网格模型时,有多种方法可供选择: Delaunay 三角化^[1], 基于八叉树的三角化,或基于坐标轴对齐的正则三角化。因为在能量极小化时需要求解一个线性系统(以三角网格的顶点个数作为变量维度),所以直观地看,能够产生更少顶点的一致 Delaunay 三角化(conforming Delaunay triangulation, CDT)或者基于八叉树自适应的三角化效率是最高的。但是在实验中发现,用正则的三角化,在得到足够光滑网格曲面的同时网格帧与帧之间的震荡最小,可以得到效果更好的动画。

1 相关工作

本文的仿真过程主要包含 2 个步骤: 基于拉格朗日的光滑粒子水流仿真(smoothed particle hydrodynamics, SPH)和轮廓提取。在每一个仿真过程中需要提取二维轮廓线,并根据这些轮廓线建立水膜曲面网格模型。在液体仿真技术中,本文按照相应的仿真模拟过程来回顾相关工作。首先回顾 SPH 的主要仿真技术,然后基于粒子液体仿真进行曲面提取。

SPH 是一种非常流行的基于粒子的液体仿真技术^[2],它是一种基于拉格朗日离散的方法,并且在仿真之前定义域不需要提前设定。在计算机图形学中,SPH 可以用于仿真液体的黏性和表面张力现象^[3]。为了快速仿真,Müller 等^[3]用显式格式计算压力,会导致液体密度大小震荡剧烈,与仿真中假设的液体不可压相悖。为了解决这个问题,Becker 等^[4]提出弱可压液体仿真(weakly compressible SPH, WC-SPH)。而 WCSPH 依赖于刚性方程,需要很小的时间步长才可保障稳定性。预测纠正的方法用雅克比迭代并且预测纠正液体粒子的位置,使时间步长可以比 WCSPH 大 2 个量级^[5]。Macklin 等^[6]把迭代的密度求解器集成到基于位置的动力仿真框架中,解决液体仿真中不可压和时间迭代步长问题。Ihmsen 等^[7]用半隐式格式预测密度并建立线性系统来提高密度的收敛速度。更加详细的 SPH 仿真技术详见文献[8]。

Marching Cubes^[9]是提取 SPH 液体曲面的一种常用方法,其通过建立液体的密度场来提取等值面作为液体曲面^[3]。另一个常用提取仿真液体曲面

的方法是 Level Set^[10],此方法通常利用符号距离场提取等值面,并且根据速度场来移动演变等值面。Level Set 根据速度场移动网格的顶点并且设计相应的补正方法来修正错误的顶点位置关系和网格的自交^[11-13]。与这些在三维空间中仿真并提取粒子所代表液体曲面的方法相比,本文方法是在平面上仿真,在平面轮廓内建立初始网格,再通过极小化能量变形为水膜网格模型。

在变形的意义上,本文方法也与基于局部微分坐标的变形相关,如文献[14-15]。这些方法的目的是通过控制点变形并使网格保持原始的局部特征,而本文是在边界约束下建立水膜模型。另一个与本文相关的工作是水滴的仿真。Wang 等^[16]提出了一个基于物理的水滴仿真方法,但是这个方法需要耗时几天才能完成一个仿真场。Wang 等^[17]也通过求解潜水波方程来模拟仿真与浅水相关的现象,得到了可观的结果。Zhang 等^[18]提出一种变形曲面来仿真水滴的方法,比文献[17]方法更加高效,但仿真系统不是无条件稳定的,依赖于水滴网格的质量。与文献[16-18]相比,本文方法在模拟平面水膜时更加轻量、稳定,可达到类似的效果。

2 本文方法

本节描述在二维平面轮廓内建立水膜模型的方法。该方法可以看做实时动画的几何网格造型。

平面上的水膜通常有可见的厚度(如图 1 所示),它静止时的表面可以用 Yong-Laplace 方程来刻画

$$\nabla p = 2\gamma H \quad (1)$$

其中, ∇p 是水膜表面里外的压强差, γ 是表面张力常量, H 是平均曲率。虽然表面张力在计算机图形学中已经有了很多的研究工作^[16-19],但是实时的交互应用及如何快速有效地建立水膜网格模型仍然是一个开放的问题。为此,本文设计了一个新的方法来建立逼真的水膜模型。



图 1 咖啡的水膜

给定平面上闭合的轮廓线,同时这些轮廓线也定义了水膜的区域,本文假设水膜可以表示成

一个厚度场 $z = z(x, y)$, 这里的定义域是平面上水膜的区域. 本文依据影响水膜的主要物理量, 把水膜的建立转变为一个基于曲面的能量极小化问题.

表面积. 表面张力是由于液体分子之间的相互作用力而形成的, 这种作用力只有当 2 个分子间距足够大的时候才可以忽略不计. 在一个液体块中, 里面的分子通常有比较均匀的分布, 分子与分子之间的作用力在各个方向上分布均匀并相互抵消. 对于液体表面上的分子, 它们周围的分子分布不平衡, 分子间作用力不能相互抵消. 为了达到平衡状态, 液体表面上的分子会被液体往里面吸引 (如图 2 所示), 这就意味着在液体的表面存在张力能量. 为了极小化这个能量, 液体表面的分子数量会极小, 从而导致液体表面有较小的表面积^[20]. 水膜表面积

$$\tilde{T} = \int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \leq \int (1 + z_x^2 + z_y^2) dx dy \quad (2)$$

本文称之为面积能量. 在实际应用中, 去掉常量用放大后的能量. 这样, 在离散的情况下只要求解稀疏的线性系统

$$T = \int z_x^2 + z_y^2 dx dy \quad (3)$$

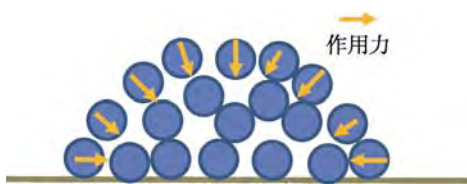


图 2 液体分子作用力

内外压强. 根据式(1)左边的项, 本文定义水膜的曲面能量为

$$U = \int H^2 dA,$$

其中, dA 表示面积单元积分. 这个能量主要惩罚了水膜表面的内外压强差, 同时也促使最终的网格曲面更加光滑.

重力势能. 假设重力为 0, 由于分子间的相互作用力的存在, 少量的液体将趋于形成球状而不是通常自然界看到的扁平状 (如图 2 所示). 事实上, 由于液体有一定的质量, 重力会促使水膜尽可能的薄, 直到与表面张力相互平衡. 如前面所述, 表面张力会使水膜面积缩小, 作为平衡的结果, 水膜顶部通常比较平坦, 厚度相近. 根据 Newton 物理定律, 水膜的重力势能

$$G = \frac{\rho g}{2} \int z^2 \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \quad (4)$$

其中, ρ 是密度, g 是重力常量. 实际中, 水膜的厚度可以预测估计为^[21]

$$\hat{z} = \sqrt{\frac{2\gamma(1 - \cos\theta)}{\rho g}} \quad (5)$$

其中, θ 是水膜与平面的接触角度. 用 \hat{z} 替换式(4)中的 z , 得到与式(2)相似的形式, 这意味着式(3)在惩罚面积能量的同时也刻画了重力势能, 所以在本文方法中并不需要显式地包含重力势能这一项.

体积约束. 当不考虑水汽蒸发时, 少量的液体形成的水膜体积是不变的. 当给定平面上水膜覆盖的区域时, 交互动画过程中需保持水膜体积不变. 为了使水膜体积不变, 可以衡量水膜体积与原始的差

$$V = \int z dx dy - V_0;$$

其中, V_0 是水膜的原始体积. 需要注意的是, 如果仅仅极小化面积能量和水膜能量最终的系数矩阵是退化的, 只能得到一个平凡的解——厚度为 0 的水膜. 另一方面, 如果加入体积约束, 会使线性系统的矩阵由稀疏变为稠密. 这是因为在考虑体积约束求解时, 随后的矩阵转置相乘使矩阵所有的元素都非 0, 将导致求解线性系统时矩阵分解效率低下. 本文将在下面边界约束一节中给出一个相对平衡的方法, 既考虑体积同时也兼顾效率.

位置约束. 对于在轮廓上的液体分子, 它们的厚度 z 值为 0. 这样同时也保证了最终的水膜网格模型与平面之间无缝隙接触.

边界约束. 为了平衡体积约束和矩阵分解效率, 本文采用边界约束. 可以观察到水膜的体积与厚度成正比, 同时水膜的厚度可以用水膜与平面的接触角 (如图 3 所示) 来估计, 如式(5)所示. 水膜与平面的接触角沿着轮廓也几乎是相同的, 因此本文方法约束厚度沿着外法向的导数不变, 即

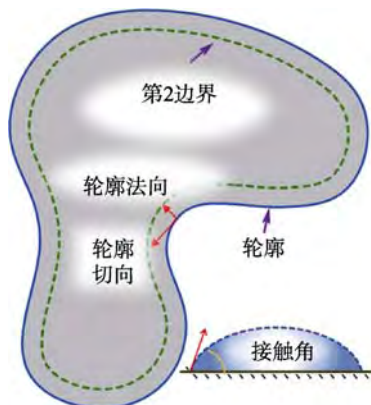


图 3 接触角和第 2 边界

边界的接触角. 由于水膜的体积几乎正比于厚度, 这样用户就可以调节接触角来设定体积.

本文应用有限差分来离散地计算 z 沿着轮廓线的值, 这个值同时也反映了水膜的体积. 如果一个网格顶点不是轮廓上的点, 但它有轮廓上的顶点是它的 1 邻域点, 那么称该顶点为第 2 边界点, 如图 3~4 所示. 给定接触角后, 可以计算第 2 边界点对应的厚度为

$$\tilde{z} = d \times \tan \theta \quad (6)$$

其中, d 是到轮廓线的距离, θ 是接触角(如图 4 所示). 在程序实现时, 本文把轮廓上的顶点看做已知的变量(厚度为 0), 把第 2 边界点和其他内部的顶点看做未知变量, 并且在总能量中惩罚第 2 边界点厚度与估计值差的平方和

$$W = \sum_{i \in K} (z_i - \tilde{z}_i)^2 \quad (7)$$

其中, K 表示第 2 边界点的集合. 这样做的原因是为了得到更加光滑的水膜曲面. 式(6)在计算第 2 边界点的厚度时只考虑了接触角, 并没有考虑它的邻域顶点, 而这些邻域顶点可能也是第 2 边界点. 如果固定第 2 边界点为已知变量(式(6)计算结果), 当和它的邻域点组合在一起的时候可能导致不光滑. 因此, 本文把式(7)作为一个惩罚项加入到总能量中, 与其他能量做一个平衡.

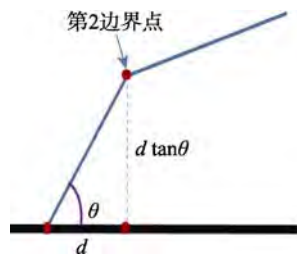


图 4 厚度估计

总能量. 本文定义总能量为面积能量, 水膜曲面能量和边界约束的一个线性组合

$$E = w_1 U + w_2 T + w_3 W;$$

其中, $w_i, i=1,2,3$ 是正的能量权重. 极小化这个能量需要求解一个稀疏的线性系统, 线性系统的解就是水膜的厚度值.

3 本文算法实现

SPH 算法. 本文首先在平面上进行一个二维的 SPH 仿真. 用 q_1, q_2, \dots, q_n 表示粒子的位置, 粒子 q_i 处的密度可以通过周围粒子的加权平均来计算

$$\rho_i = \sum_{j \in N_i} m_j R(|q_j - q_i|, h),$$

其中, N_i 是周围粒子的集合, m_j 是粒子 q_j 的质量, $R(x, h)$ 是半径为 h 的径向基函数. 本文采用文献[6]中的计算方法在时间上对粒子位置更新

$$\Delta q_i = \frac{1}{\rho_0} \sum_{j \in N_i} (\lambda_i + \lambda_j + s_{\text{corr}}) \nabla R(|q_i - q_j|, h).$$

其中, Δq_i 表示位置的改变量; ρ_0 表示静息密度; λ_i 形式为

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{C_i}{\sum_k \nabla_{q_k} C_k}; \\ C_i = \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \end{cases}$$

$$s_{\text{corr}} = -k \left(\frac{R(|q_i - q_j|, h)}{R(\Delta r, h)} \right),$$

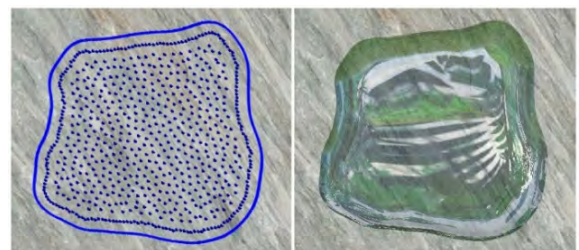
Δr 是一个小于 h 的正数, k 是一个较小的正数. 更详细的计算过程及其意义见文献[6]. 注意: 不论是在二维平面上进行 SPH 仿真还是在三维空间中, 此计算过程是一样的.

轮廓. 在平面上进行 SPH 仿真之后, 本文利用 Marching Squares (二维时 Marching Cubes 称为 Marching Squares^[22]) 来提取粒子所代表液体的边界轮廓, 如图 5a 所示. Marching Squares 利用平面上标量场来提取等值线. 本文定义平面上的标量场为

$$\rho(x) = \sum_i R(\|x - q_i\|, h).$$

在实现中, 本文取如下径向基函数

$$R(x, h) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2, & x < h \\ 0, & x \geq h \end{cases}$$



a. 粒子和轮廓 b. 水膜

图 5 液体粒子和轮廓及相应的水膜

初始网格. 本文首先在平面仿真区域中建立一个正则网格(横平竖直的四边形网格), 在每一个仿真时间步长后在正则网格上提取水膜边界的轮廓线. 然后遵循一个查找的流程, 三角化轮廓线

包含的区域并建立初始的网格模型 $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$, 其中 \mathcal{V} , \mathcal{E} 和 \mathcal{F} 分别表示网格顶点、边和面的集合. 这里的查找流程与 Marching Squares 在 15 种情况^[22] 中查找相似. 实现时, 遍历轮廓线内包含的正则网格单元, 并且根据 15 种情况来分别三角化网格单元. 最后考虑三角化后网格单元的拓扑关系并建立水膜的初始三角网格模型, 这里建立的初始网格是对轮廓线包含区域的一个三角离散, 仍是一个平面网格. 最终, 初始网格通过极小化总能量函数变形为所需要的水膜模型.

离散能量. 本文用离散的 Laplace-Beltrami 算子^[23]来计算初始三角网格的水膜的曲面能量, 原因是在连续情形下 Laplace-Beltrami 算子与平均曲率紧密相连

$$\Delta_{\chi} p = 2H(p).$$

其中, χ 是一个二维的流形; $H(p)$ 是流形上 p 点的平均曲率向量, 即 $\|H(p)\|$ 是平均曲率, $H(p)/\|H(p)\|$ 是外法向. 在离散面积能量式(3)时, 可以应用正则网格上的标准有限差分, 但是这样并没有考虑初始水膜三角网格的拓扑关系. 在离散实现中, 本文并不是采用正则网格横平竖直的节点, 而是用初始三角网格边上厚度值的差来估计式(3)的值

$$\tilde{T} = \sum_{e \in \mathcal{E}} |z(e,1) - z(e,2)|^2,$$

其中, $z(e,1)$ 和 $z(e,2)$ 表示网格边 e 的 2 个端点上的 z 值. 用不同的权重把离散的能量结合在一起, 得到总的离散能量

$$\tilde{E} = w_1 \sum_{i \in \mathcal{V}} (z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} z_j)^2 + w_2 \tilde{T} + w_3 W \quad (8)$$

其中, \mathcal{N}_i 是顶点 i 的 1 邻域点; α_{ij} 是网格边上离散 Laplace-Beltrami 算子的权重, 其对最终的水膜曲面光滑性有较大影响. Uniform 权重使曲面不够光滑(如图 6a 所示), 而用 cotangent 权重^[24]曲面更加光滑(如图 6b 所示). 权重的选取必须考虑邻域顶点的分布情况, 同时也得消除三角化的偏向. 因此, 本文采用 cotangent 权重来计算顶点 i 和它 1 邻域点形成边的权重

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{s_i} \\ \beta_{ij} = \frac{a_{ij} + b_{ij}}{2}; \\ s_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_{ij} \end{cases}$$

其中, a_{ij} 和 b_{ij} 表示与网格边 (i, j) 相对的角. 在极小化式(8)时, 只需要求解一个稀疏对称正定的线性系统, 这是因为式(8)是二次能量项的加权和, 并且组装后的系统矩阵是稀疏的.

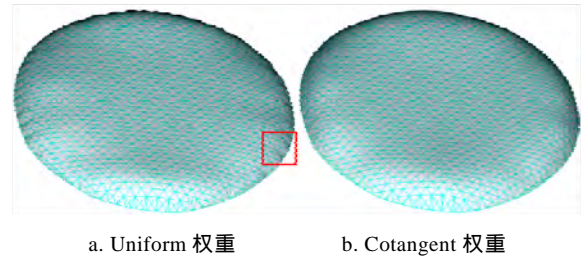


图 6 不同 Laplace-Beltrami 算子权重的效果

4 实验结果和讨论

我们在一个 dual-CPU 2.4 GHz 的笔记本电脑上实现了本文中的算法. 该算法主要步骤如下:

- Step1. 在平面上进行一步二维的 SPH 仿真.
- Step2. 计算标量场并且提取 SPH 液体的轮廓.
- Step3. 三角化离散轮廓包含的区域得到初始网格模型.
- Step4. 极小化能量式(8), 使初始网格变形为水膜模型.
- Step5. 转 Step1.

图 5 所示为一个用环境映射渲染的结果, 以及相应的液体粒子和轮廓边界. 图 7 所示为图 5b 水膜对应的三角网格曲面, 该曲面是在 100×100 的正则网格上建立的, 相应提取的轮廓在视觉上已经足够光滑, 并且达到 25 帧/s 的速度.

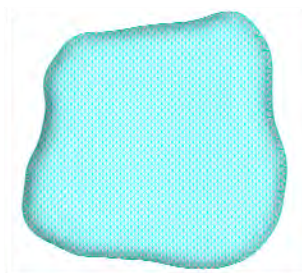


图 7 水膜三角网格曲面

三角化. 在三角化边界轮廓所包含区域的过程中, 可以采用不同的方法来建立初始水膜的三角网格模型: 自适应的方法, 以及在正则网格上创建的方法. 由于边界轮廓光滑的需求, 轮廓上的顶点不可以减少. 对于内部的顶点, 由于其高度相差无几, 可以用更少的顶点来表示. 自适应离散方法

CDT 满足边界轮廓顶点多、内部顶点相应少的要求^[25]. 图 8 所示为采用 CDT 连续得到 2 帧的水膜网格模型. 应用 CDT 三角化, 在实验中仿真的速度可以加快 10 帧/s, 但是帧与帧之间网格的震荡变的越加明显.

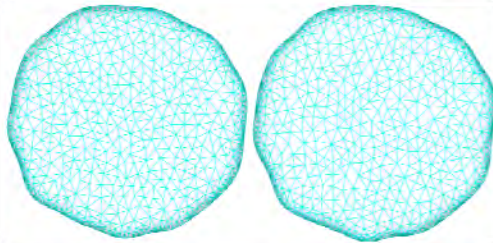


图 8 CDT 三角化连续 2 帧的水膜网格模型

震荡. 对于每一步仿真中的单个水膜网格模型, 其光滑程度已经基本满足计算机图形学的应用. 但是, 在时间序列上 2 帧模型拥有不同的边界轮廓, 随后离散得到的初始三角网格也是相应不同的(如图 8 所示), 而水膜模型的建立是紧紧依赖于边界轮廓和初始的三角网格. 由于边界轮廓和初始的三角网格不同, 连续 2 帧之间建立起的水膜模型厚度是有偏差的, 这种偏差在时间序列上导致水膜厚度震荡. 在应用 CDT 三角化的实验中厚度震荡更为明显, 这是因为随着边界轮廓的不同 CDT 三角化结果会相差较大导致的. 如图 8 中, 连续 2 帧边界轮廓相似, 但内部离散结果差异很大. 相比而言, 对于正则网格上建立的水膜模型, 连续帧之间的网格一致性强, 产生的厚度震荡也小. 为了进一步减小厚度震荡, 本文建议在连续帧的三角网格模型上做一个厚度平滑操作: 对于连续的 3 帧 F_{i-1}^s , F_i 和 F_{i+1} (F_i^s 是厚度平滑后的第 i 帧网格), 假设 V_i 表示它们拥有的共同顶点(相对于正则网格而言, 因为它们内部的顶点都来自于正则网格), 在 V_i 中计算 3 帧厚度的平均值, 作为 F_i 平滑后的值, 得到网格 F_i^s .

水膜厚度. 由于本文中把边界轮廓的接触角约束作为一个惩罚项加入到总能量中, 这样建立水膜的接触角通常小于用户给定的值并且水膜的高度也低于估计值. 在实验中, 可以通过控制式(8)中的 w_2 来得到拥有不同接触角或高度的水膜, 如图 9 所示. 由于 w_2 对应的能量项不仅惩罚面积能量同时也极小重力势能, 所以一个相对较小的值会得到面积较大同时厚度较大的水膜, 如图 9 所示.

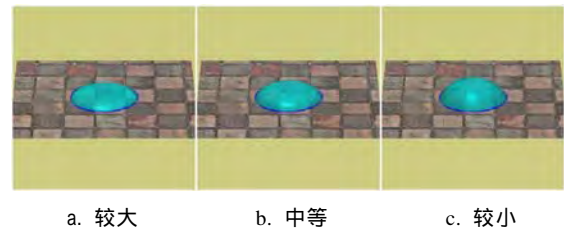


图 9 不同 w_2 值的效果

更多结果. 图 10 所示为具有不同拓扑结构的水膜, 可以看到, 二维轮廓边界的拓扑结构随着时间改变, 建立的水膜也随之光滑地演变. 图 11 所示为水膜环绕障碍物的 3 个结果. 图 12 所示为桌面上水膜的演变, 可以看到, 刚开始相遇的水膜之间形成了一个小的通道, 随着水膜的融合通道变大, 水膜自然地融合在一起. 图 10~12 中通过加外力(风, 用户鼠标交互)来驱动平面上液体粒子的运动, 进而得到运动的水膜. 另外, 本文方法的一个小模拟程序可以从 <http://pan.baidu.com/s/1cuwB1s> 下载, 并且可以用鼠标交互应用.



图 10 复杂拓扑的水膜

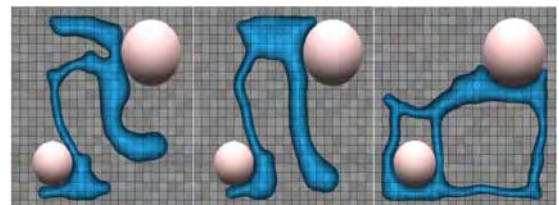


图 11 水膜环绕障碍物

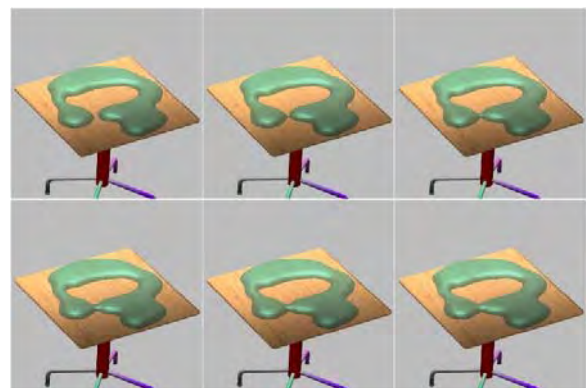


图 12 桌面上水膜的演变

5 结 语

本文提出一种快速仿真模拟水膜的方法, 其中应用了一个二维的液体粒子仿真器, 并建立二次能量函数, 通过极小化能量函数来建立水膜模型. 该方法可以使用户实时地交互仿真. 目前本文方法只适用于像桌面地板这些平面上水膜的仿真, 推广到曲面上需要实时计算平行传输, 我们计划在接下来的研究工作中完成推广; 同时, 还要完成效果更佳的水膜渲染器. 另一个值得考虑的问题是采用统一的网格, 用每帧之间网格顶点形变的方式表达水膜表面, 这样可能会解决震荡问题, 但也会面临难以适应拓扑改变的问题, 这也是接下来要研究的问题之一.

参考文献(References):

- [1] Chen Zhonggui, Cao Juan, Yang Chenhui. Topology improvement for constructing optimal Delaunay triangulation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23(12): 1967-1974(in Chinese)
(陈中贵, 曹娟, 杨晨晖. 构造最优 Delaunay 三角剖分的拓扑优化方[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(12): 1967-1974)
- [2] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. Reports on Progress in Physics, 2005, 68(8): 1703-1759
- [3] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2003: 154-159
- [4] Becker M, Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 209-217
- [5] Solenthaler B, Pajarola R. Predictive-corrective incompressible SPH[J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): Article No. 40
- [6] Macklin M, Müller M. Position based fluids[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(4): Article No. 104
- [7] Ihmsen M, Cornelis J, Solenthaler B, *et al.* Implicit incompressible SPH[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2014, 20(3): 426-435
- [8] Ihmsen M, Orthmann J, Solenthaler B, *et al.* SPH fluids in computer graphics[C] //Proceedings of Eurographics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2014: 21-42
- [9] Lorenson W E, Cline H E. Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm[C] //Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1987: 163-169
- [10] Osher S, Fedkiw R. Level set methods and dynamic implicit surfaces[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2006
- [11] Müller M. Fast and robust tracking of fluid surfaces[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2009: 237-245
- [12] Brochu T, Batty C, Bridson R. Matching fluid simulation elements to surface geometry and topology[J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 29(4): Article No. 47
- [13] Wojtan C, Thürey N, Gross M, *et al.* Physics-inspired topology changes for thin fluid features[J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 29(4): Article No. 50
- [14] Lipman Y, Sorkine O, Cohen-Or D, *et al.* Differential coordinates for interactive mesh editing[C] //Proceedings of the Shape Modeling International. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 181-190
- [15] Sorkine O, Alexa M. As-rigid-as-possible surface modeling[C] //Proceedings of the 5th Eurographics Symposium on Geometry Processing. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 109-116
- [16] Wang H M, Mucha P J, Turk G. Water drops on surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(3): 921-929
- [17] Wang H M, Miller G, Turk G. Solving general shallow wave equations on surfaces[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2007: 229-238
- [18] Zhang Y Z, Wang H, Wang S, *et al.* A deformable surface model for real-time water drop animation[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(8): 1281-1289
- [19] Akinci N, Akinci G, Teschner M. Versatile surface tension and adhesion for SPH fluids[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): Article No. 182
- [20] White H E. Modern college physics[M]. New York: D. Van Nostrand Company, 1948
- [21] de Gennes P G, Brochard-Wyart F, Quéré D. Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013
- [22] Maple C. Geometric design and space planning using the marching squares and marching cube algorithms[C] //Proceedings of International Conference on Geometric Modeling and Graphics. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2003: 90-95
- [23] Xu G L. Convergent discrete Laplace-Beltrami operators over triangular surfaces[C] //Proceedings of Geometric Modeling and Processing. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 195-204
- [24] Meyer M, Desbrun M, Schröder P, *et al.* Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds[M] //Visualization and mathematics III. Heidelberg: Springer, 2003: 35-57
- [25] Shewchuk J R. Triangle: engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator[M] //Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering. Heidelberg: Springer, 1996: 203-222