More examples on Mathematical Induction

Instructor: Shizhe Zhou

Course Code:00125401

P12

Theorem2.8 有向图独立集问题

强归纳假设之范例

- G=(V,E)是一个**有向**图。证明G中存在一个独立集S(G)，使得V中所有节点可通过S(G)的某一个节点通过一条长度<=2的路径到达。

图的“独立集”S：S是V的子集,S中任何两点不相邻.

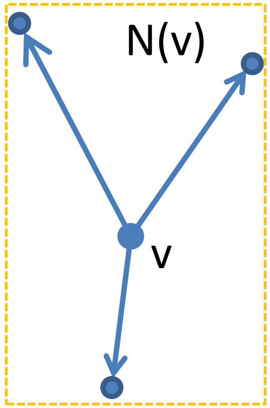
证明:

对节点数量作归纳; 对节点数为n的G论证.

归纳基础：n<=2时可验证成立.

利用强归纳假设:假设对节点数小于n的一切图，命题成立.

定义“1邻域”N(v)为 v发出的边所指向的节点集合与v的并集.



令H为V-N(v)的导出图，即

对挖去“1邻域”之后的图做归纳

H={V(H), E(H)} = { V(H)=V-N(v), E(H)={(x,y)|x, y∈V(H), (x,y)∈ E } }

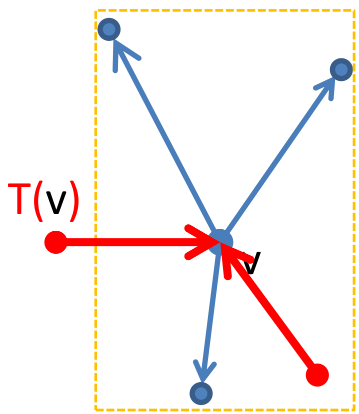
显然H的节点数<n，故可使用强归纳假设: H存在满足条件的独立集**S(H);**

令T(v)为G中发出边指向v的邻居节点集合. 注意T(v)可能为空.

可对H与T(v)的关系分为2情况论证：

A: If S(H)不包含T(v)中的节点，则S(H)+v为G的满足要求的独立集

B: If S(H)包含T(v)中的节点， 则S(H)为G的满足要求的独立集



下面从**独立性**和**到达性(to被挖去的节点v)**两方面论证

子命题A: <u>If S(H)不包含T(v)中的节点，则S(H)+v为G的满足要求的独立集</u>

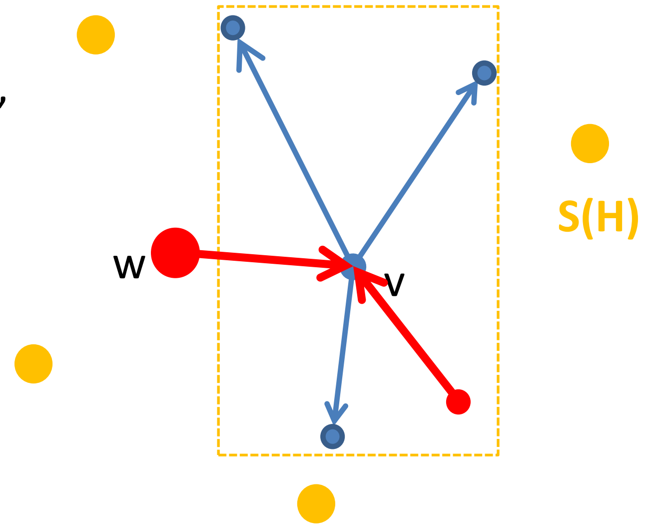
独立性: 只需证明S(H)中不存在节点与v相邻
由于G是有向图, 如果相邻, 则必定存在v指向S(H)的边或者S(H)指向v 的边.
因为S(H)不包含T(v)中的节点, 故S(H)没有节点有指向v的边;
又因为H不包含N(v),故S(H)也不包含N(v),所以G中没有从v指向S(H)中节点的边;
所以S(H)不可能与v相邻.

到达性: H中节点都可由S(H)中节点到达; N(v)中节点可由v到达. 路径长度不超过2.

子命题B: <u>If S(H)包含T(v)中的节点，则S(H)为G的满足要求的独立集</u>

独立性: S(H)自然本身就是独立集.

到达性: S(H)包含T(v)中的节点, 设这些点中的一个为w,
因为w到v长度为1，v到N(v)长度<=1,
故w 可经由长度<=2的路径到达N(v).
又，H中节点都可由S(H)中节点到达;
所以V=V(H)+N(v)都可由S(H)到达.



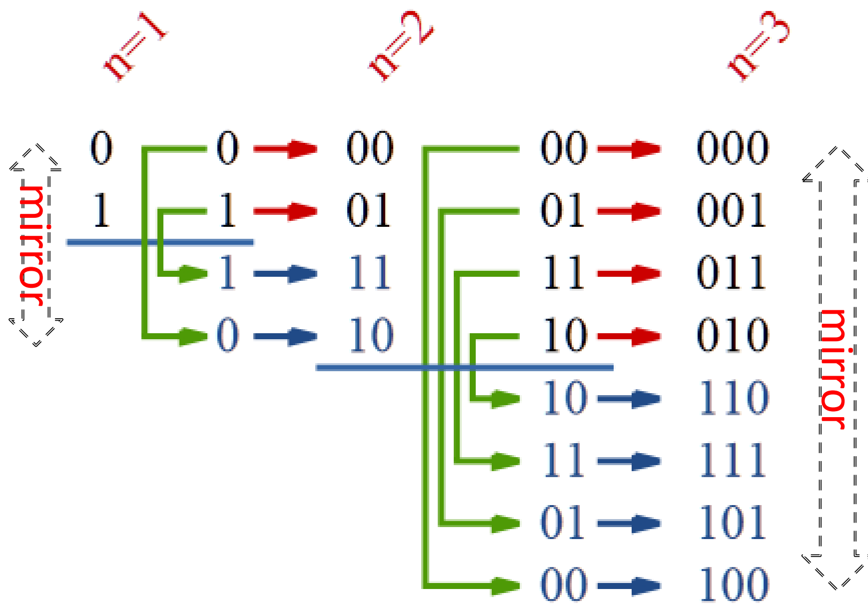
P14

Gray code:

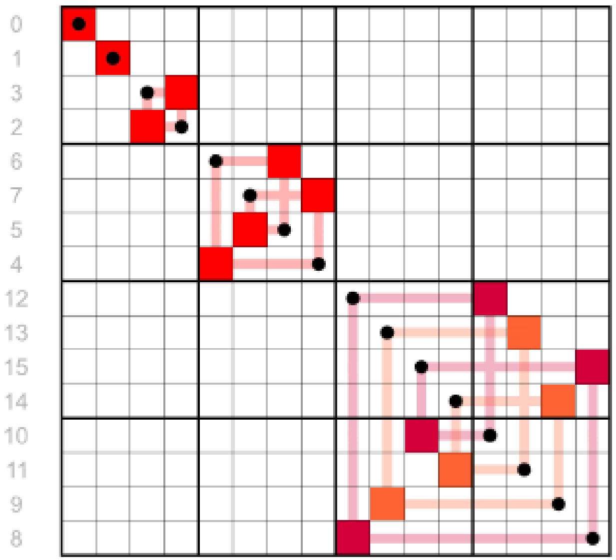
一种原来用于通信，现在则常用于模拟－数字转换和位置－数字转换的编码方式

1.格雷码的**码字长度**：一串格雷码中总**共包含的码的个数.**
2.**位宽**：**单个码字**包含的**bit数**

1.无法构造码字长度为奇数的loopy GrayCode.
2.常用的长度一般是2^n
3.可以构造任意偶数长度的loopy GrayCode - theorem2.10

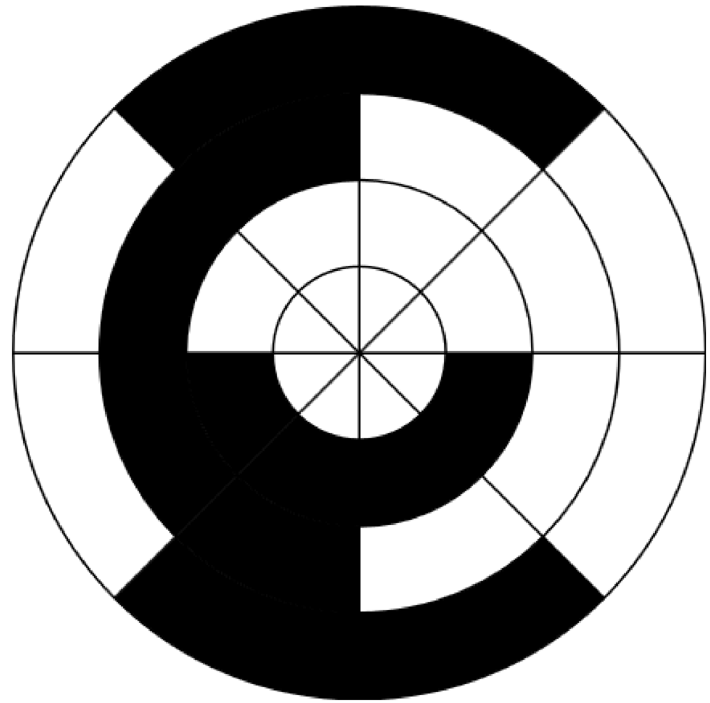


mirroring construction



4bit Gray code permutation

0000 = 0
0001 = 1
0011 = 3
0010 = 2
0110 = 6
0111 = 7
0101 = 5
0100 = 4
1100 = 12
1101 = 13
1111 = 15
1110 = 14
1010 = 10
1011 = 11
1001 = 9
1000 = 8



4bit rotary Gray code for angle-measuring device

使用格雷码对编码盘上的亮暗区域编码，使得其连续的码字之间只有一个数位变化。这样就不会因为器件制造的精确度有限，而使得触点转到边界位置而出现错误编码。

- Theorem 2.1:

For any integer k>0, there exist gray code with length = 2k.

Induction hypothesis: if length=2k exists.

Inductive reasoning: length=2(k+1) exists.

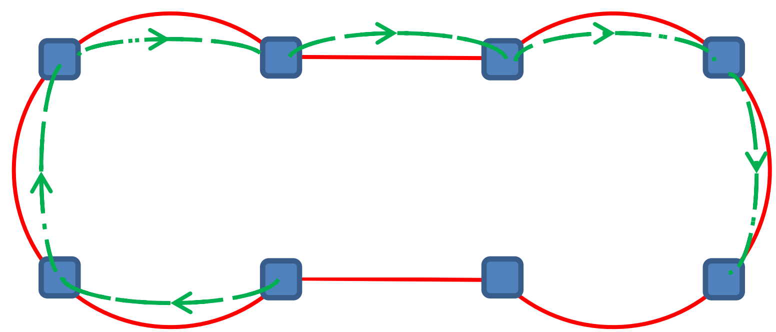
00 01 11 10 → 000 **0**01 **1**01 111

$$s_1, s_2, \cdots, s_{2k} \rightarrow 0s_1, 1s_1, 1s_2, 0s_2, 0s_3, 0s_4, \cdots, 0s_{2k}$$

- Theorem 2.11:

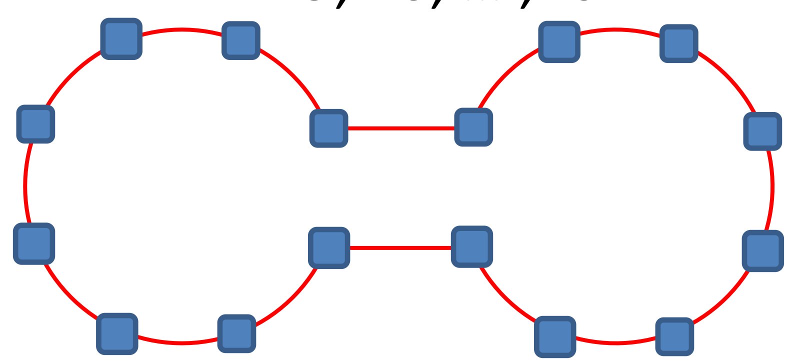
For any integer k>0, there exists gray code with length=$\lceil \mathrm{lb}\, k \rceil$; if k%2==0, it's closed, otherwise, it's open.

K = 5, 6, 7, 8



Proof: (自行阅读)Pg16.

K = 9, 10, … ,16



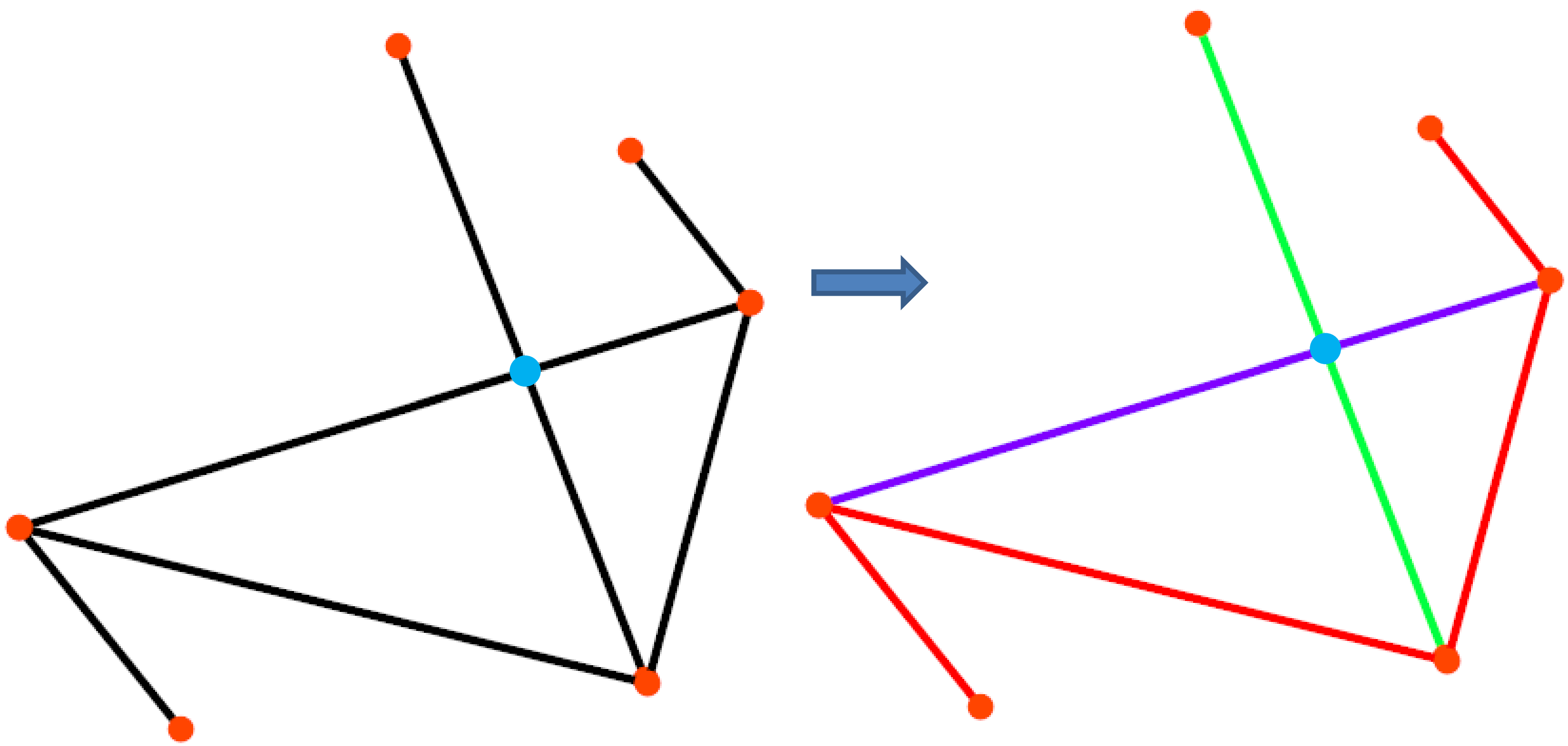
$$\mathrm{lb} = log_2$$

$$\lceil \mathrm{lb}5 \rceil = \lceil \mathrm{lb}4 \rceil + 1$$

$$\lceil \mathrm{lb}10 \rceil = \lceil \mathrm{lb}8 \rceil + 1$$

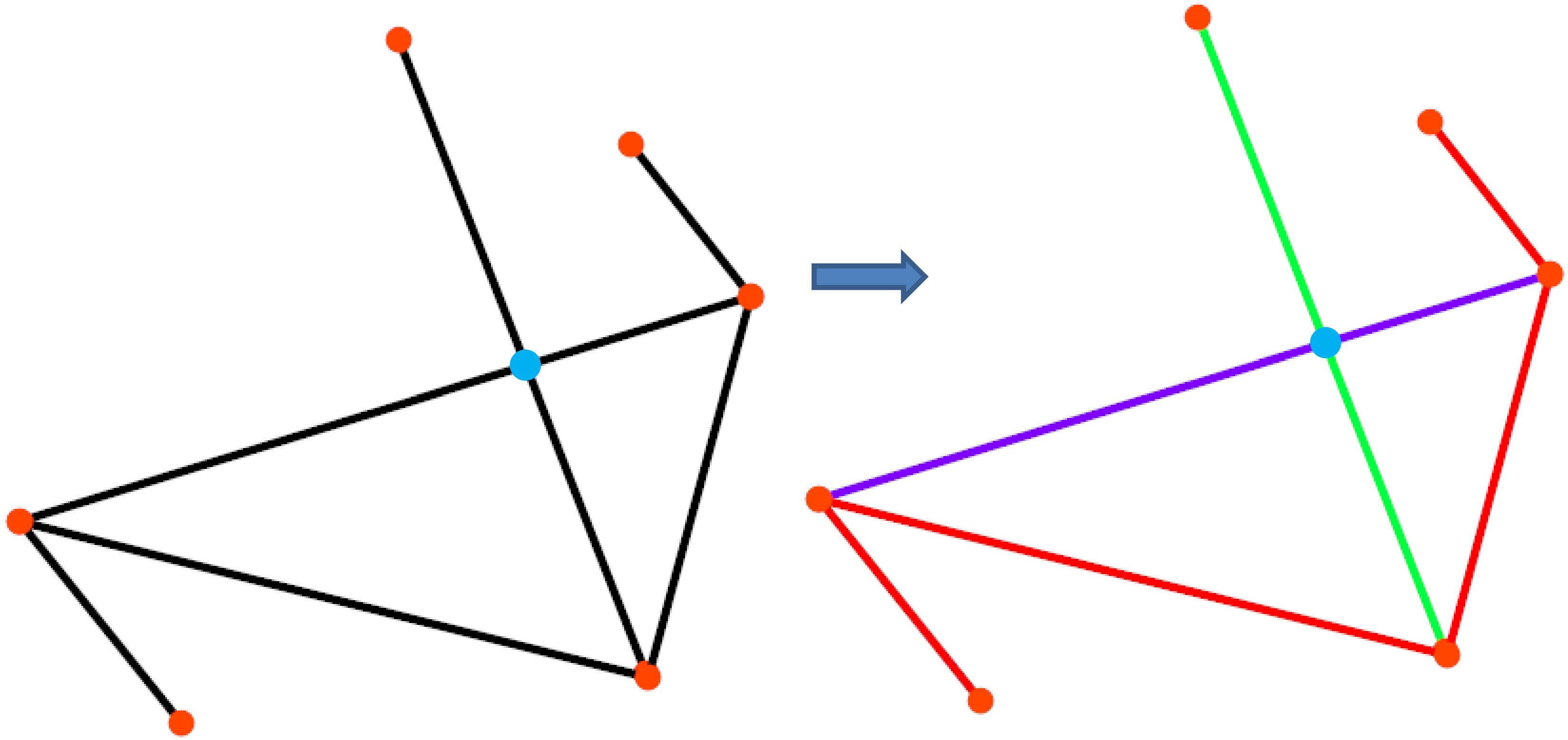
2.10
Find non-overlapping paths in a graph

- Find non-overlapping paths in a connected undirected graph(Odd node path decomposition)

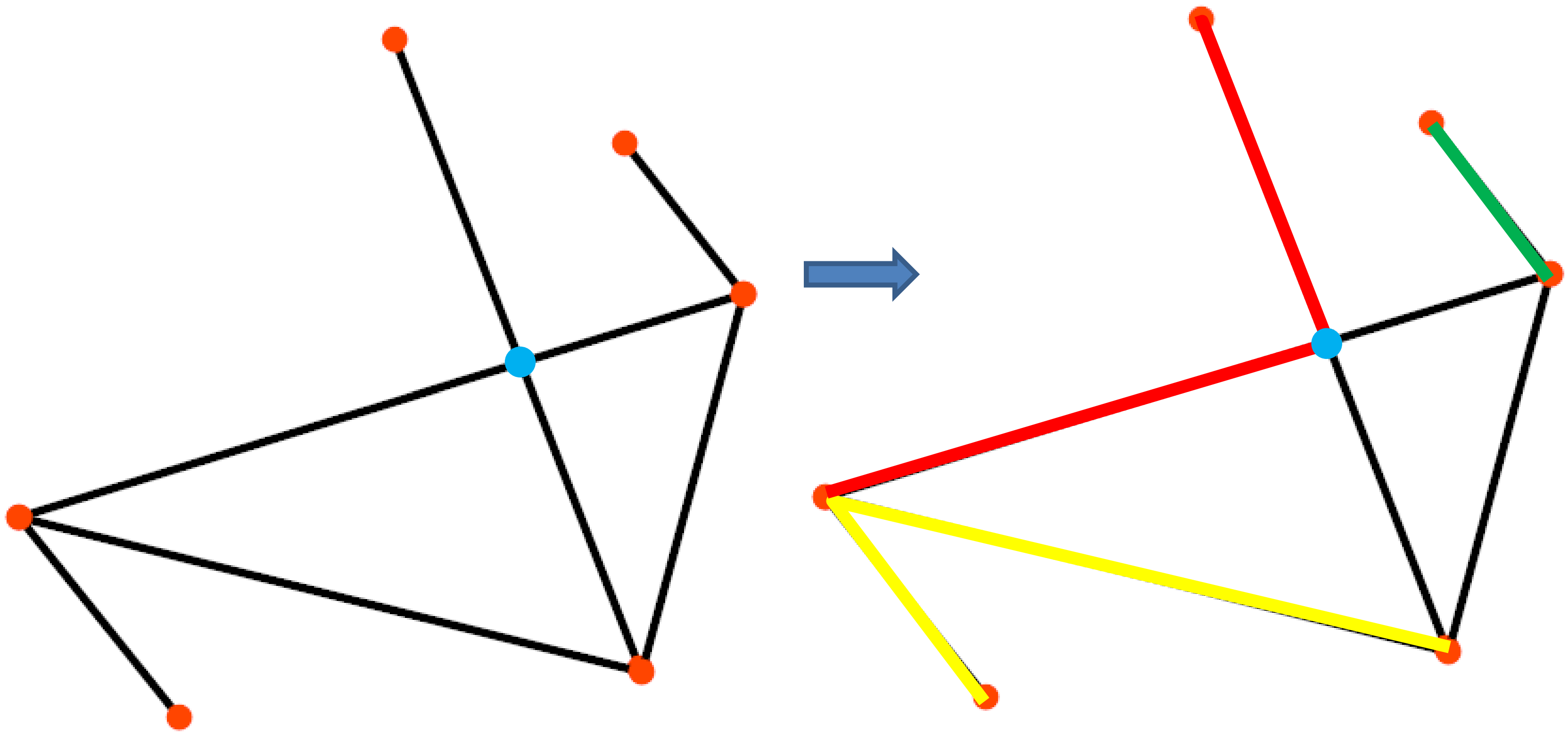


Theorem 2.12:

G=(V, E) is connected undirected graph. O是度数为奇数的节点集合. 则O中存在节点对,每一对都能找到连接他们的相互不重叠的路径.



Another decomposition



proposition

#奇度点=even number

- 连通图中度数为奇数的节点的数目为偶数.

证明：$\because \sum d(v) = \# E * 2$

$\therefore \sum d(v) = \sum_{v \in O} d(v) + \sum_{v \in P} d(v)$ 为偶数

然而$\sum_{v \in P} d(v)$总是偶数，

故$\sum_{v \in O} d(v)$必须是偶数,

因此集合O有偶数个元素.

Inventor paradox –归纳假设变强, 证明基础比以前更好

Proof:

Induction hypothesis:

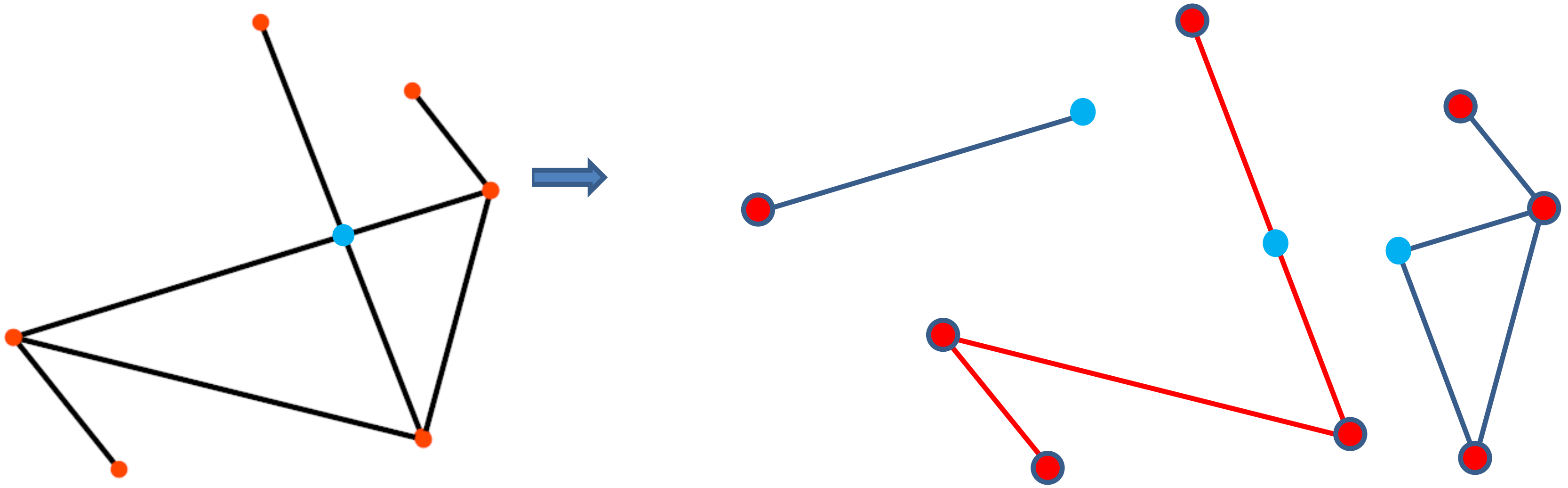
the theorem is right for *connected* graph G with #E<m.

(after the decomposition, G will not be necessarily connected!)

Extended induction hypothesis:

the theorem is right for *any* graph G with #E<m.

Inductive reasoning:



增强假设 --inventor paradox

扩展原命题使之成为更一般的命题. 好处是获得了更强的证明力，代价是需要证明的范围扩大了。

Proof:

Inventor paradox --归纳假设变强, 证明基础比以前更好

Induction hypothesis:

the theorem is right for *connected* graph G with #E<m.

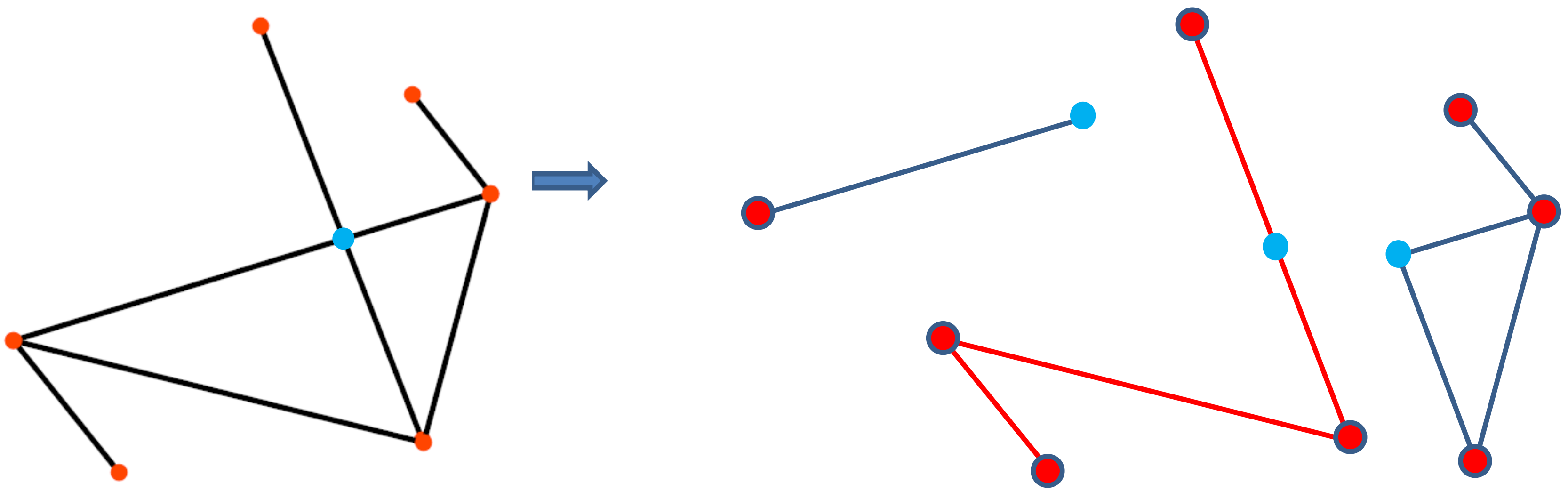
(after the decomposition, G will not be necessarily connected!)

某些图的奇度点连接路径移除后, 可能丢失连通性.

Extended induction hypothesis:

the theorem is right for *any* graph G with #E<m.

Inductive reasoning:



习题2.6

- 证明: $1^2-2^2+3^2-4^2\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}k(k+1)/2$

证法1: 分奇数偶数分别做归纳证明.

当k=2n时...

当k=2n+1时..

证法2: 不分奇偶，直接证明也可以.

习题2.7

- 已知一个有n+1个数的集合,这些数从前2n个自然数1,2,…,2n中随意选出.证明该集合中一定存在两个数,其中一个能整除另一个.

证明:

需要先证明引理(*): 前2n个自然数定可以划分成n个集合,使得每个集合中的数可以两两整除.

归纳基础 n=1,2时引理(*)自然成立.

归纳假设:引理(*)对n成立,现在要证明引理(*)对n+1也成立.

证明: 当归纳指标取n时, 存在n个集合。每一个这样的集合中的元素可以从小到大排序，则数n+1必定是某一个集合(令为d)的最后（最大）的元素。现在增加了2n+1和2n+2两个元素, 2n+2可以并入d, 2n+1单独成为一个集合,这样集合数量只增加了1。因此划分出n+1个集合. 引理(*)得证.

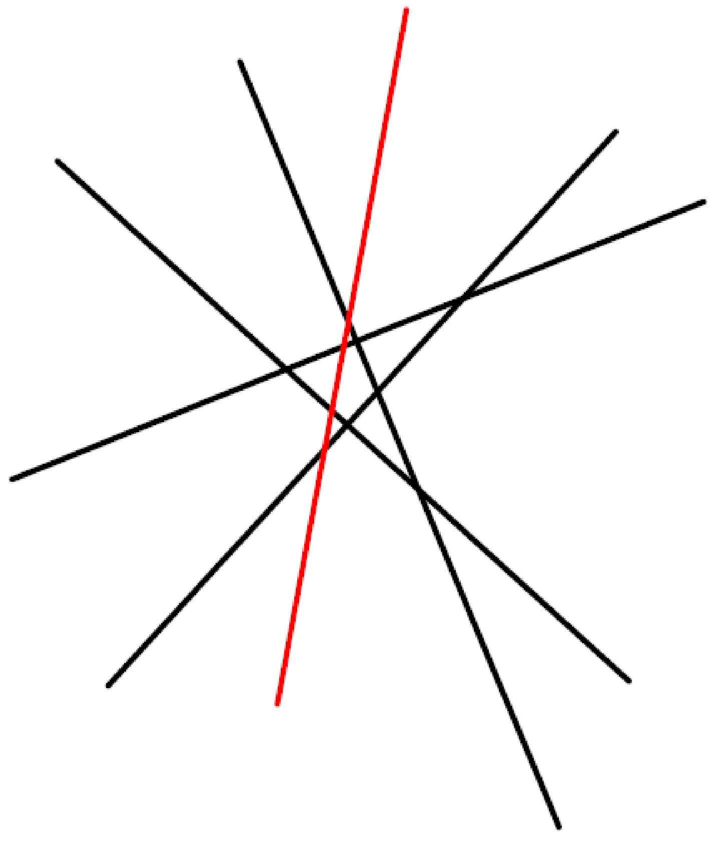
借助引理(*)，用抽屉原理.

数列归纳

- 如果时间充足可继续讲解 Practice2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7

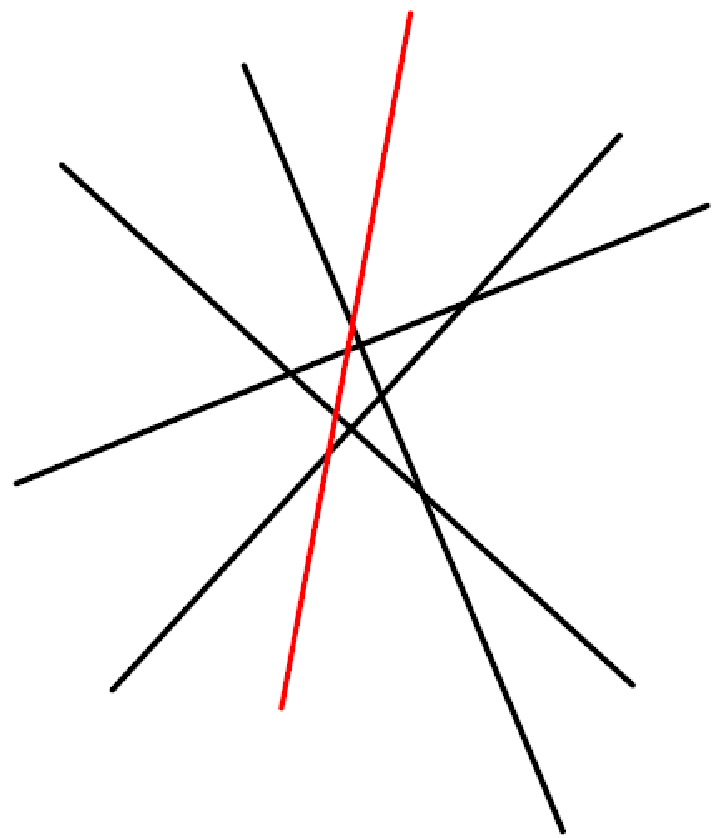
Practice 2.16 <Pg.23>

居一般位置的任意条直线构成的区域必有一个三角形.



Practice 2.17 <Pg.23>

n条居一般位置的任意条直线构成的区域至少有n-2个三角形.

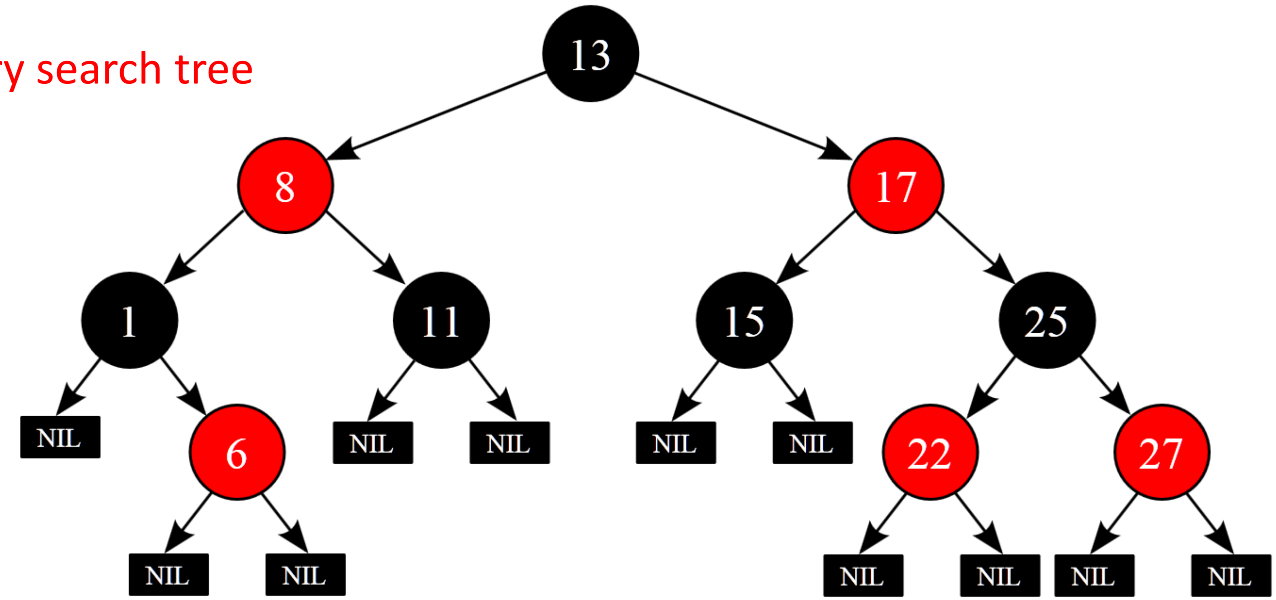


作业

- 2.3
- 2.6
- 2.12
- 2.13
- 2.17

Red-Black tree for sorting(红黑树)

a type of binary search tree



Self-balancing tree algorithm: AVL and Red-Black tree; The key operation: rotating the node.